NEKE JEDNAČINE KOJE SE SVODE NA KVADRATNE

1) Bikvadratna jednačina

To je jednačina oblika: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ Uvodimo smenu $x^2 = t$, dobijamo jednačinu $at^2 + bt + c = 0$, nadjemo $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ i vratimo se u smenu:

$x^2 = t_1$ i $x^2 = t_2$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{t_1}$ i $x_{3,4} = \pm\sqrt{t_2}$

Primer1: $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

$x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \Rightarrow$ smena $x^2 = t$

$t^4 - 4t^2 + 3 = 0$

$a = 1$

$b = -4$

$c = 3$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$t_1 = \frac{4 + 2}{2} = 3$$

$$t_2 = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

Vratimo se u smenu:

$x^2 = t_1$		$x^2 = t_2$
$x^2 = 3$	i	$x^2 = 1$
$x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$		$x_{3,4} = \pm\sqrt{1}$
$x_1 = +\sqrt{3}$		$x_3 = +1$
$x_2 = -\sqrt{3}$		$x_4 = -1$

Primer 2: $(4x^2-5)^2+(x^2+5)^2=2(8x^4-83)$

$$(4x^2-5)^2+(x^2+5)^2=2(8x^4-83)$$
$$16x^4-40x^2+25+x^4+10x^2+25=16x^4-166$$
$$x^4-30x^2+50+166=0$$
$x^4-30x^2+216=0 \rightarrow$ Bikvadratna, smena: $x^2=t$
$$t^2+30t+216=0$$

$a=1$
$b=-30$
$c=216$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{30\pm\sqrt{900-864}}{2}$$
$$t_{1,2}=\frac{30\pm 6}{2}$$
$$t_1=\frac{36}{2}=18$$
$$t_2=\frac{24}{2}=12$$

Vratimo se u smenu:

$x^2=18$	$x^2=12$
$x_{1,2}=\pm\sqrt{18}$	$x_{3,4}=\pm\sqrt{12}$
$x_{1,2}=\pm 3\sqrt{2}$	$x_{3,4}=\pm 2\sqrt{2}$
$x_1=+3\sqrt{2}$	$x_3=+2\sqrt{2}$
$x_2=-3\sqrt{2}$	$x_4=-2\sqrt{2}$

Primer 3:

$$(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)=3$$

Ovo liči na bikvadratnu jednačinu, ali je mnogo bolje uzeti smenu: $x^2-2x=t$

$$x^2-2x=t$$
$$t^2-2t=3$$
$t^2-2t-3=0 \quad \rightarrow \quad a=1,\ b=-2,\ c=-3$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$t_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm4}{2}$$
$$t_1=3$$
$$t_2=-1$$

Vratimo se sada u smenu:

$$x^2-2x=t_1 \qquad\qquad x^2-2x=t_2$$
$$x^2-2x=3 \qquad\qquad x^2-2x=-1$$
$$x^2-2x-3=0 \qquad\qquad x^2-2x+1=0$$

Sada rešavamo dve nove kvadratne jednačine po x.

$a=1$
$b=-2$
$c=-3$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}$$
$$x_{1,2}=\frac{2\pm4}{2}$$
$$x_1=3$$
$$x_2=-1$$

$a=1$
$b=-2$
$c=1$

$$x_{3,4}=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}$$
$$x_{3,4}=\frac{2\pm0}{2}$$
$$x_3=1$$
$$x_4=1$$

Dakle, rešenja su: $\{3,-1,1,1\}$

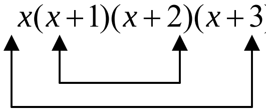
<u>Primer 4:</u> $x(x+1)(x+2)(x+3)=0{,}5625$

Ovo baš i ne liči na bikvadratnu jednačunu, a ne ‘’vidi se’’ da ima neka pametna smena.
Ako sve pomnožimo tek tad smo u problemu!!!
Probajmo da pomnožimo prva dva, i druga dva, da vidimo šta će da ispadne…

$$(x^2+x)(x^2+3x+2x+6)=0{,}5625$$
$$(x^2+x)(x^2+5x+6)=0{,}5625\rightarrow \text{ Neće!!!}$$

Probajmo onda prvi i četvrti, a drugi i treći!!!

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=0{,}5625$$



$$(x^2+3x)(x^2+2x+1x+2)=0{,}5625$$
$$(x^2+3x)(x^2+3x+2)=0{,}5625$$

E, ovo je već bolje $\Rightarrow$ Smena: $x^2+3x=t$

$$t\cdot(t+2)=0{,}5625$$
$$t^2+2t-0{,}5625=0$$
$$t_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+2{,}25}}{2}=\frac{-2\pm 2{,}5}{2}$$
$$t_1=+0{,}25$$
$$t_2=-2{,}25$$

Vratimo se u smenu:

$$x^2+3x=+0{,}25$$
$$x^2+3x-0{,}25=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+1}}{2}$$
$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{10}}{2}$$
$$x_1=\frac{-3+\sqrt{10}}{2}$$
$$x_2=\frac{-3-\sqrt{10}}{2}$$

$$x^2+3x=+2{,}25$$
$$x^2+3x-2{,}25=0$$
$$x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{9-9}}{2}$$
$$x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{0}}{2}$$
$$x_3=x_4=-\frac{3}{2}$$

5) $\dfrac{x^2+x-5}{x}+\dfrac{3x}{x^2+x-5}+4=0$

$$\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0$$
$$\frac{x^2+x-5}{x}+3\cdot\frac{x}{x^2+x-5}+4=0$$

Ovde je zgodno uzeti smenu $\dfrac{x^2+x-5}{x}=t$, jer je onda $\dfrac{x}{x^2+x-5}=\dfrac{1}{t}$

$$t+3\cdot\frac{1}{t}+4=0/\cdot t$$
$$t^2+3+4t=0$$
$$t^2+4t+3=0$$

$$t_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{-4\pm 2}{2}$$

$$t_1=-1$$

$$t_2=-3$$

Vratimo se u smenu:

$$\frac{x^2+x-5}{x}=-1$$

$$x^2+x-5=-x$$

$$x^2+x-5+x=0$$

$$x^2+2x-5=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+20}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{24}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{6}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{2\left(-1\pm\sqrt{6}\right)}{2}$$

$$x_1=-1+\sqrt{6}$$

$$x_2=-1-\sqrt{6}$$

ili

$$\frac{x^2+x-5}{x}=-3$$

$$x^2+x-5=-3x$$

$$x^2+x-5+3x=0$$

$$x^2+4x-5=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm 6}{2}$$

$$x_3=1$$

$$x_4=-5$$

$\left\{-1+\sqrt{6},-1-\sqrt{6},1,-5\right\}$ su rešenja.

Zadaća:

Zbirka zadataka, str. 70, 565., 566.